



Zadania na XVII Podkarpacki Konkurs Matematyczny im. Franciszka Lejki

Poziom I

(klasy pierwsze szkół ponadgimnazjalnych i trzecie gimnazjów)

Etap rejonowy

11 marca 2017 r. godzina 10.00

(150 minut)

1. Dany jest trapez ABCD, taki, że $|BC| = |CD| = |AD| = 5$ oraz $|AB| = 5$. Przez środek M odcinka AD i wierzchołek C poprowadzono prostą, która przecięła prostą AB w punkcie P. Oblicz pole i obwód trójkąta PBC.
2. Znajdź liczbę sześciocyfrową, wiedząc że pierwszą jej cyfrą jest 3, zaś po przestawieniu cyfry 3 na koniec (cyfra 3 staje się cyfrą jedności) uzyskamy liczbę stanowiącą 25% liczby szukanej.
3. Rozwiąż układ równań w zbiorze liczb rzeczywistych, różnych od zera:
 $(x - \frac{1}{xyz} = 0 \text{ i } y - \frac{4}{xyz} = 0 \text{ i } z - \frac{16}{xyz} = 0)$.
4. Dany jest dowolny, niezerowy odcinek AB, na którego końcach poprowadzono dwa równoległe do siebie odcinki AD i BC, mające odpowiednio długości $|AD| = a$ oraz $|BC| = b$, gdzie $a \neq 0$, $b \neq 0$, $a \neq b$. Poprowadzono odcinki BD i AC, które przecięły się w punkcie P. Przez punkt P poprowadzono odcinek PQ, równoległy do AD (punkt Q należy do odcinka AB). Wyznacz długość odcinka PQ w zależności od odcinków o długościach a i b.
5. Dane są ułamki:

$$u_1 = \frac{\frac{1}{a^{-2}} - \frac{1}{b^{-2}}}{\frac{1}{a^{-1}} - \frac{1}{b^{-1}}} - \frac{\frac{1}{a^{-3}} - \frac{1}{b^{-3}}}{\frac{1}{a^{-2}} - \frac{1}{b^{-2}}} \text{ oraz } u_2 = \frac{(a^{-1} + b^{-1})^{-1} \cdot (\sqrt{2 + \sqrt{3}} - \sqrt{2 - \sqrt{3}})^2}{1 - a \cdot (a + b)^{-1}},$$

gdzie a, b są dowolnymi różnymi liczbami dodatnimi.

Uzasadnij, że $\frac{1}{u_1} \cdot u_2 > 2$.

Powodzenia!